فصل ۲

کاربرد اصلی انرژی (معادله مومنتوم) در جریان کانال باز

مقدمه

در مسائل عملی کانالهای باز، جریان را به صورت یک بعدی تحلیل می‌کنیم: یعنی

«جهت طول = جهت حرکت (جریان) » $H = \left(\frac{P}{\gamma} + Z\right) + \alpha\left(\frac{v^2}{2g}\right)$

خصوصیات متوسط جریان در مقطع جریان (مقطع عمود بر جهت جریان) را در نظر گرفته و تغییرات آنها را در جهت جریان بررسی می کنیم؛ لذا می‌خواهیم مقدار متوسط H را در مقطع عرضی بر جهت جریان بررسی کنیم :

۱- مقدار متوسط $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ ؟ در مقطع عرضی ؟ $\alpha\left(\frac{v^2}{2g}\right)$

۲- مقدار $\left(\frac{P}{\gamma} + Z\right)$ در مقطع عرضی جریان = ؟

اکنون باید بررسی کنیم که عبارت $\left(\frac{P}{\gamma} + Z\right)$ در مقطع جریان چگونه است؟

فشار در سطح آزاد آب = فشار اسمز = فشار نسبی = ۰

توزیع فشار در جریان کانالهای باز تابع مشتقات ثقل و دیگر شتابها طبق معادله اولر است.

در جهت دلخواه s (۱) $-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P}{\gamma}+Z\right)=\rho a_s$: معادله اولر

در جهت *n* (عمود بر s) (۲) $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{P}{\gamma}+Z\right)=\rho a_n$: معادله اولر

اکنون یک خط جریان در جهت s در نظر بگیرید و *n* جهت عمود بر آن:

باید توزیع فشار را در جهت *n* بررسی کنیم. شتاب عمودی بر خط جریان در هر مقطعی از معادله $a_n=\frac{v^2}{r}$ به دست می‌آید.

v: سرعت جریان در طول خط جریان با انحنای *r*

حالت های توزیع فشار

اکنون ۳ حالت را بررسی می کنیم:

أ- توزیع هیدروستاتیکی فشار

ب- جریان یکنواخت

ج- توزیع فشار در جریان با انحناء (خمیده)

توزیع هیدروستاتیکی فشار

- حالت $v=0$ (آب ساکن):
  - n را در جهت z در نظر بگیرید. با انتگرال گیری از رابطه ۲ خواهیم داشت:

$$-\partial/\partial n\left(\frac{P}{\gamma}+Z\right)=0 \rightarrow \frac{P}{\gamma}+Z=c$$

  - اما در نقطه ای روی سطح سیال داریم: $\frac{P}{\gamma}+z=z_1 \Rightarrow z=z_1, P=0 \quad [c=z_1]$
  - در هر نقطه دلخواهی مثل A در عمق y زیر سطح آزاد آب، (طبق شکل)

$$\frac{P_A}{\gamma}=z_1-z_A=y$$

$$\Rightarrow P_A=\gamma y \Rightarrow$$ توزیع هیدروستاتیکی فشار

  - در این حالت فشار به صورت خطی با عمق تغییر می‌کند و ضریب تناسب γ است.
و فشار در هر نقطه برابر عمق آن نقطه زیر سطح آزاد آب است. $\frac{P_A}{\gamma}=y$

- سطح آب موازی کف کانال است.

- سطح مقطع (۱–۰)، المانی به طول ΔL و عرض واحد (عمود بر صفحه) در نظر بگیرید. هر نقطه ای مثل A در عمق y (که عمود برسطح آزاد آب اندازه گیری می‌شود)، وزن ستون آب $A\square A'$ $\gamma \Delta L y =$ و در جهت قائم عمل می‌کند.
- فشار در AA' با مولفه عمودی وزن ستون $A\square A'$ موازنه برقرار می‌کند. لذا

$$P_A \Delta L = \gamma y \Delta L \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{P_A}{\gamma} = y\cos\theta$$

(چرا؟)

- پس هد پیزومتریک در A برابر است با: $\frac{P_A}{\gamma} + Z = y\cos\theta + z$
- یعنی فشار به صورت خطی با y تغییر می‌کند. لکن ضریب تناسبی است.

اگر نقطه O را در نظر بگیریم، h عمق عمود بر جهت جریان است و d عمق قائم نقطه O تا سطح آزاد آب، در این صورت $h = d\cos\theta$ و فشار در کف و در O برابر است با:

$$P_0 = \gamma h\cos\theta \Rightarrow \quad \text{هد فشار} = \frac{P_0}{\gamma} = h\cos\theta = d\cos^2\theta$$

هد پیزومتریک در هر نقطه ای مثل A، برابر است با: $z_A + y\cos\theta = z_0 + h\cos\theta$

لذا در کل مقطع هد پیزومتریک $= z_0 + d\cos^2\theta$

شیب رودخانه ها و کانالها را خیلی تند گویدن اگر $\cos^2\theta = 0.9999$ یا $\sin\theta = 0.01$

به طور کلی اگر $\theta < 6^\circ$ یا شیب کمتر از ۱۰٪ باشد، توزیع فشار را می‌توان هیدروستاتیکی در نظر گرفت. به روایت دیگر $\theta < 10^\circ$ یا 7.18< شیب که در اغلب موارد این شرایط برقرار است. پس زین پس: $\cos\theta = \cos^2\theta \approx 1$

- انحنای خطوط جریان در جریان متغیر تدریجی آنقدر کم است که a_n قابل اغماض است. لذا توزیع فشار در جریان متغیر تدریجی را نیز می‌توان هیدروستاتیکی در نظر گرفت.

$$\text{Z + عمق قائم = هد پیزومتریک =} \quad \frac{P}{\gamma}+Z$$

- **جمع بندی:** در جریان کانالهای باز، توزیع فشار هیدروستاتیکی است. اگر:
  1. شیب کانال خیلی زیاد باشد.
  2. انحنای خطوط جریان زیاد باشد. مثل محل ریزش آزاد آب *Free overfall*

مسأله تبدیل

The Transition Problem

- مسأله تبدیل
  - کف کانال را در بالادست دریچه سطح بنا می گیریم.

و اما مسأله تبدیل

- کانالهای مستطیلی و افقی
  - برآمدگی کف را ملایم در نظر بگیرید.
  - معلومات : $Q \Leftarrow V_1 \ , \ y_1 \ , \ \Delta z$
  - مجهولات: y_2 یا V_2
  - **حل** : کف کانال در بالادست تبدیل = سطح مبنا
  - مجهولات ظاهراً ۲ تاست.
  - دبی در واحد عرض کانال، q

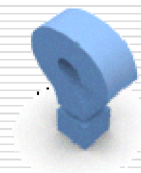
$$H_1 = H_2$$

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta z$$

$$q = \frac{Q}{b} = y_1 V_1 = y_2 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{q}{y_2}$$

مسأله تبدیل

- تنها مجهول y_2 است و قابل حل . $$y_2 + \frac{q^2}{2g y_2^2} = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Delta z \Rightarrow$$



معادله درجه ۳ فوق معمولاً دارای ۲ جواب مثبت است (ارتفاع منفی بی معنی است).
حال مسأله این است که کدام یک از پاسخها درست است؟!

انرژی مخصوص و عمق های متناوب

(Specific Energy & Alternative Sepths)

انرژی مخصوص (E)، انرژی نسبت به کف کانال (سطح مبنا): $E = y + \frac{v^2}{2g} \Leftarrow$

حال نحوه تغییرات E نسبت به y برای q=cte را بررسی می کنیم.

$$V = \frac{q}{y} \Rightarrow y + \frac{q^2}{2gy^2} \qquad E_2 = E_1 - \Delta Z \quad , \quad Ey = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2}$$

بخش یگری از نمودار در ربع۴ است که عمق منفی می‌دهد.

$$\Rightarrow (E - y)y^2 = \frac{1}{2g} q^2 = cte$$

شاخه بالایی، نماینده جریان عمیق و کم سرعت و شاخه بالایی نماینده جریان سریع و کم عمق است که در یک نقطه (بحرانی) به هم می رسند. جریان را در این حالت، بحرانی گوییم.

سؤال این است که B رخ می‌دهد یا B`

اگر مشخصات جریان در بالادست، به وسیله نقطه A نمایش داده شود: آنگاه B جواب است.

استدلال این است که روی منحنی نمی توان از B رد شد تا به `B رسید (چون دبی ثابت است)

زیرا E سیستم از E2 کمتر است. لذا قطعاً $y_2 < y_1$

اما اینکه سطح آب افت می‌کند یا بالا می رود، بستگی به ΔZ ندارد.

(به دلیل افزایش انرژی) سطح آب افت می‌کند. $y_2 < y_1 \Rightarrow V_2 > V_1 \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} > \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow$

حداکثر اختلاف ارتفاع بالادست و پایین دست را ΔZ_{max} می نامیم. با تغییر ارتفاع در این بازه مشخصات جریان تغییر نمی کند. در نقطه ای بحرانی جریان کمترین انرژی مخصوص را داراست. این مقدار را انرژی بحرانی می نامیم. $E_1 - E_c = \Delta z_{max}$

جریان در آستانه چوک (انسداد): $\Delta Z = \Delta Z_{max} = choke$

جریان به صورت چوک (choke) $\Delta Z > \Delta Z_{max}$

- حالت choke:
  - می بینیم که این انرژی *E1*، به صورت تئوری آب نمی تواند این Δz را رد کند. اما این اتفاق در طبیعت رخ می‌دهد و E1 آن افزایش می یابد. این امر باعث ایجاد جریان غیریکنواخت می‌گردد. پس زدگی (Back water).
  - ممکن است این کمبود انرژی به وسیله کاهش دبی یا افزایش ارتفاع آب (y) تأمین می‌گردد.

مسئله تبدیل به صورت تغییر در عرض کانال

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} \qquad , \qquad q_2 = \frac{Q}{b_2}$$

$$b_2 < b_1 \Rightarrow q_2 > q_1 \qquad ; \qquad \Delta Z = 0$$

چون ارتفاع کانال تغییر نمی کند $(\Delta Z = 0)$

، انرژی هم تغییر نمی کند. $E = E_1 = E_2$

بعداً رابطه ای بین q , Ec خواهیم یافت.

جریان بحرانی

(Critical Flow)

خصوصیات تحلیلی جریان بحرانی (دید ریاضی)

$$E = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} \Rightarrow q^2 = gy_c^3 \Rightarrow q = \sqrt{gy_c^3} \qquad y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow V_c = \sqrt{gy_c} \quad , \frac{v_c^2}{2g} = \frac{1}{2}y_c \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}y_c + y_c = \frac{3}{2}y_c \Rightarrow y_c = \frac{2}{3}E_c$$

بنابراین تمام نقاط بحرانی ممکن روی نمودار متعلق به خط $E = \frac{3}{2}y$ می باشند.

حال برای E معین داریم(E_0)

$$q^2 = 2gy^2(E_0 - y) \quad , \quad \frac{dq}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}E_0$$

بنابراین حالت بحرانی، حالتی است که حداکثر دبی ممکن را برای یک مقدار معین انرژی مخصوص دارد.

$$\begin{cases} y \to 0 \\ y \to E_0 \end{cases} \to \begin{cases} q \to 0 \\ q \to 0 \end{cases}$$

سرعت بحرانی و سرعت موج:

- معادله $V_c = \sqrt{gy_c}$ بیان می کند که در جریان بحرانی، سرعت برابر $\sqrt{gy}$ است.
- از طرف دیگر، این عبارت برابر سرعت پیشروی موجی طویل با ارتفاع کم در آبی با عمق y است که این از مهمترین خصوصیات حالت بحرانی است.

دو نوع موج: ۱–نوسانی ۲–سرج (surge)

موج سرج:

- دارای فرانت یا پیشانی متلاطمی است و تغییر ناگهانی در عمق موج ایجاد می‌کند. مثال دیگر این است که اگر آب ساکنی داشته باشیم و صفحه قائمی را با سرعت ؟ در آن حرکت دهیم، موج surge ایجاد شده و با سرعت c پیشروی می‌کند. اگر ناظر در پیشانی موج باشد، جریان دائمی است. اگر ناظر در ساحل باشد جریان غیر دائمی است. اگر روی موج باشد، بالا و پایین موج ارتفاع ثابتی دارد. پس دائمی است. با نوشتن معادله انرژی : $c = \sqrt{gy}$

- موج نوسانی:

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} tgh(\frac{2\pi y}{L})$$

y: عمق آب کانال

L: طول موج

اگر L نسبت به y بسیار بزرگ باشد، آنگاه $\frac{2\pi y}{L}$ کوچک بوده لذا $tgh(\frac{2\pi y}{L})$ با $\frac{2\pi y}{L}$ برابر خواهد بود. پس $c^2 = \frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{2\pi y}{L} \Rightarrow c^2 = gy$

اینها همان امواجی‌اند که اغلب در کانالها بر اثر عملکرد کنترلی ها و موانع به وجود می‌آیند. بنابراین می‌توان نتیجه گیری کرد که سرعت موج $c = \sqrt{gy}$ ، سرعت انتقال به هم خوردگی در جریان کانال باز روی سطح آب است. البته c نسبت به آب سنجیده می‌شود.

عدد فرود را قبلاً تعریف کرده بودیم که:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 - Fr^2$$

کنترل پایین دست و بالادست:

در جریان زیربحرانی، یک به هم خوردگی می‌تواند به سمت بالادست حرکت کند. یعنی جریان زیر بحرانی تحت تأثیر کنترل در پایین درست است. برعکس، جریان فوق بحرانی نمی تواند توسط هیچ مکانیزمی در پایین دست تحت تأثیر قرار گیرد. لذا فقط از بالادست کنترل می‌شود. مثلاً دریچه کشویی.

مقاطع غیر مستطیلی

(Non Rectangular Sections)

- فرم معادله انرژی مخصوص

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \cdot \frac{dA}{dy}$$

$$B = \frac{dA}{dy} \Rightarrow E'(y) = 1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}$$

- شرط حداقل بودن انرژی مخصوص

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow Q^2 B_c = g{A_c}^3 \Rightarrow V_c = \sqrt{gD} \leftarrow$$

(جریان بحرانی)

D: عمق هیدرولیکی $(= \frac{A}{B})$ B: پهنای سطح آب

$$D = y \quad , Fr = \frac{V}{surge\ velocity} = \frac{V}{\sqrt{gD}} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 - Fr^2$$

مقاطع غیر مستطیلی

- محاسبه عمق بحرانی
  - روشهای محاسبه عمق بحرانی در انواع مقطع ها:
    - مستطیلی: $y_c = (q^2/g)^{1/3}$
    - غیرمستطیلی: $y_c = f(q, g)$
  - روش سعی و خطا: به عنوان مثال برای مقطع ذوزنقه ای.

$$Q^2 B_c = gA^3 \Rightarrow \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^{\,3}}{B_c} = \frac{(b + my_c)^3 y_c^{\,3}}{b + 2my_c}$$

  - روش های عددی: حل معادله غیر خطی بر حسب yc توسط یکی از روشهای زیر:
    - نیوتون- رافسون
    - تنصیف
    - تفاضلهای عددی (بسط سری تیلور)
    - Interval Halving
    - Bi- Section
    - Seiant

- روش منحنی (جدول)های بی بعد

معادله $Q^2B_c = gA^3$ را به صورت زیر بی بعد کرده‌اند.

$$\frac{Q^2m^3}{gb^5} = \frac{(1+y_c')^3 {y_c'}^3}{(1+2y_c')} \quad ; \quad y_c' = \frac{my_c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{Qm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}\cdot b^{\frac{5}{2}}} = \Psi = \frac{(1+y_c')^{\frac{3}{2}} {y_c'}^{\frac{3}{2}}}{(1+2y_c')^{\frac{1}{2}}}$$